PART3 置換積分法と三角関数

要点整理と公式

要点① $\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx$ の形の不定積分

置換積分法の公式

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du \cdots\cdots① \qquad (g(x)=u)$$

において，$f(u)=u^{\alpha}$ とすると

①の左辺は $\int f(u)g'(x)dx=\int u^{\alpha}g'(x)dx=\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx$

①の右辺は $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C=\dfrac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

より，次の公式が成り立つ。

$\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx$ の不定積分

$$\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx=\frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$$

(ex) 不定積分 $\int\sin^3x\cos xdx$ を求める。

$$\int\sin^3x\cos xdx=\int\sin^3x \qquad dx= \qquad +C$$

要点② やや複雑な三角関数の不定積分

置換積分法を用いて，三角関数の不定積分を求める。

(ex) 不定積分 $\int\sin^3xdx$ を求める。

$$\int\sin^3xdx=\int \qquad \cdot \qquad dx=\int(1-\cos^2x)\sin xdx$$

$\cos x=u$ とおくと　$-\sin xdx=du$

$$\int\sin^3xdx=\int(1-u^2)\cdot(-1)du=\int(u^2-1)du$$

$$=\frac{1}{3}u^3-u+C$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

（ex）不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ を求める。

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\qquad}{\qquad}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$\cos x=u$ とおくと　$-\sin x dx=du$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{-1}{1-u^2}du=\int\frac{1}{(u-1)(u+1)}du=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}(\log|u-1|-\log|u+1|)+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos^5 x dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

Point Pickup

置換積分法と三角関数

積分する関数を ($\sin x$ の式) $\times\cos x$ や ($\cos x$ の式) $\times\sin x$ の形に変形し，それぞれ $\sin x=u$，$\cos x=u$ とおくことで，置換積分法の公式を用いて不定積分を計算することができる。

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du \qquad (g(x)=u)$$

$$\rightarrow \int \{g(x)\}^{\alpha} g'(x)dx=\frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \fallingdotseq -1)$$

第16講 PART3 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

また，C は積分定数とする。

1 $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x dx = \boxed{\text{ア}} + C$

① $\sin^5 x$　② $4\sin^3 x$

③ $\dfrac{1}{5}\sin^5 x$　④ $\dfrac{1}{5}\cos^5 x$

2 $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \boxed{\text{イ}} + C$

① $\tan x$　② $\dfrac{1}{\tan x}$

③ $2\tan^2 x$　④ $\dfrac{1}{2}\tan^2 x$

3 $\displaystyle\int \frac{2}{\sin x}dx$

$$\frac{2}{\sin x}=\frac{2\sin x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}$$

$\cos x=u$ とおくと，$\boxed{\text{ウ}}\,dx=du$

$$\int \frac{2}{\sin x}dx=\int \frac{\boxed{\text{エオ}}}{1-u^2}du$$

$$=\boxed{\text{カ}}+C$$

[ウ の選択肢]

① $\sin x$　② $-\sin x$

③ $-\cos x$　④ $-\sin u$

[カ の選択肢]

① $\log(1-\cos^2 x)$　② $\log\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

③ $\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$　④ $\log\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

[MEMO]

PART3 置換積分法と三角関数

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos^5 x dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

[解答]

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos^5 x dx=\int \cos^5 x\cdot(-\cos x)' dx=-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx=\int \cos^2 x\cdot\cos x dx=\int (1-\sin^2 x)\cos x dx$

$\sin x=u$ とおくと　$\cos x dx=du$

$$\int \cos^3 x dx=\int (1-u^2)du=u-\frac{u^3}{3}+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x=u$ とおくと　$\cos x dx=du$

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{1}{1-u^2}du=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}(\log|1+u|-\log|1-u|)+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$$

第16講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$$\int \sin^4 x\cos x dx = \int \sin^4 x\cdot(\sin x)' dx$$ [A]

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

[A]　$\alpha \neq -1$ のとき，

$$\int \{f(x)\}^{\alpha} f'(x) dx = \frac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

ここでは，$f(x)=\sin x$，$\alpha=4$ となる。

2

[正解] イ：④

[解説]

$\tan x = u$ とおくと，$\dfrac{dx}{\cos^2 x} = du$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int \tan x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$$ [B]

$$= \int u du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

[B]　$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

ただし，$g(x)=u$

3　**[正解]** ウ：②，エオ：-2，カ：③

[解説]

$$\frac{2}{\sin x}=\frac{2\sin x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}$$ [C]

[C]　分母・分子に $\sin x$ をかける。

$\cos x=u$ とおくと，$\boldsymbol{-\sin x dx}=du$

$$\int\frac{2}{\sin x}dx=\int\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{-2}{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)dx$$

[D]

[D]　$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$
ただし，$g(x)=u$

$$=\int\boldsymbol{\frac{-2}{1-u^2}du}$$

$$=\int\frac{2}{(u+1)(u-1)}du$$

$$=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$ [E]

[E]　部分分数に分解する。

$$=\log|u-1|-\log|u+1|+C$$

$$=\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

$$=\boldsymbol{\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C$$ [F]

[F]　$\sin x\neq 0$ より，
$1+\cos x>0$，$1-\cos x>0$ なので，
絶対値記号をはずして表す。